УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Отчет по лабораторной работе №4

по предмету «Численные методы»

Вариант 14

Выполнил:

Наривончик А.М.

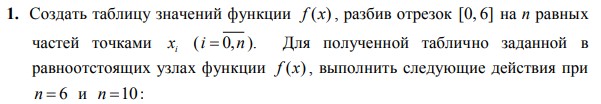
Гр. 351004

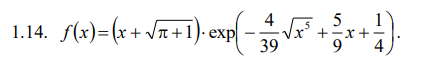
Проверил:

Степанова Т. С.

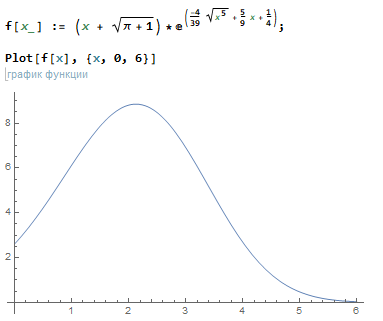
Минск 2024

**Интерполяция и среднеквадратичное приближение**

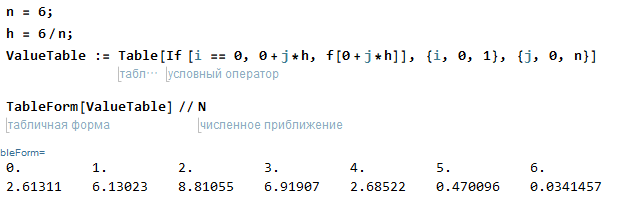


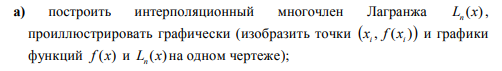


Зададим функцию, для наглядности построим ее график.



Разобьём промежуток [0,6] на n = 6 частей и построим таблицу значений:





**Интерполяционный многочлен Лагранжа** имеет вид:



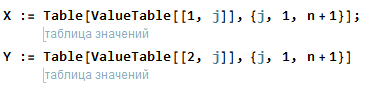
Введем обозначение:



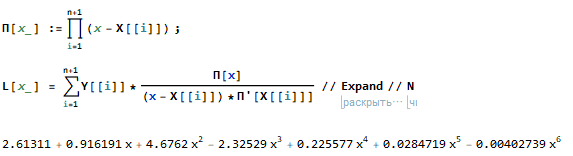
Тогда интерполяционную формулу Лагранжа можно переписать в виде:

****

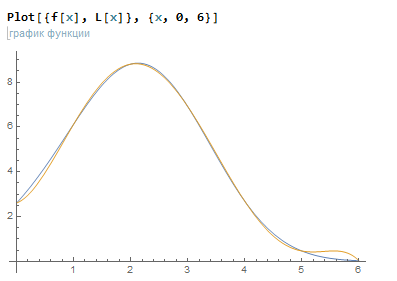
Зададим для удобства вектор X точек xi и вектор Y значений функции в этих точках yi:



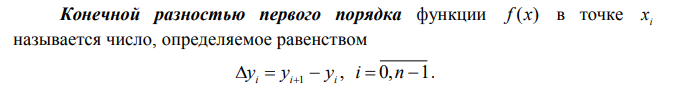
Используя обозначения выше, зададим функцию П(x) и построим интерполяционный многочлен Лагранжа L(x):

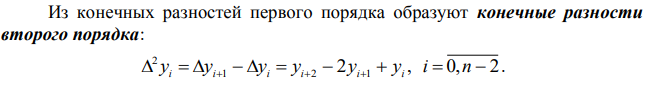


Наконец построим график функции f(x) (синим цветом) и интерполяционного многочлена L(x)(оранжевым цветом):

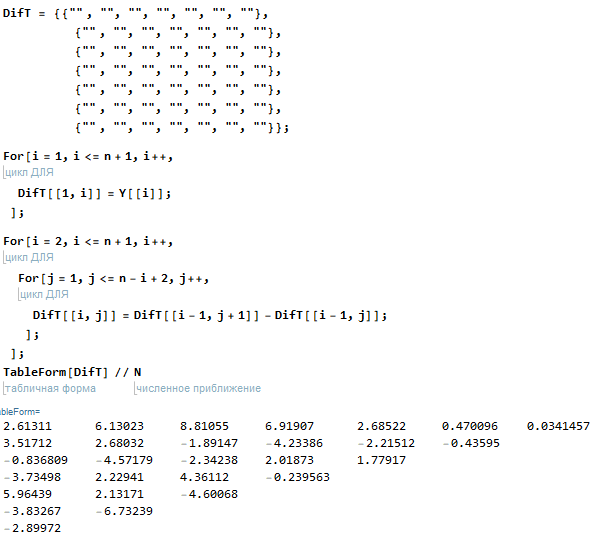






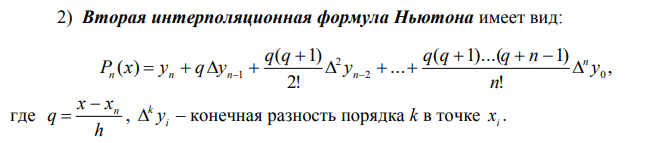


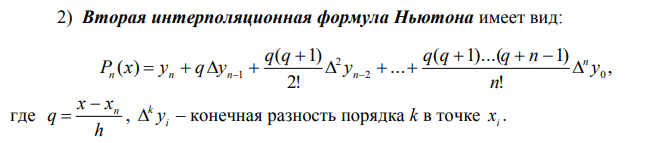
Построим таблицу конечных разностей до n-го порядка:





**Вторая интерполяционная формула Ньютона** имеет вид:





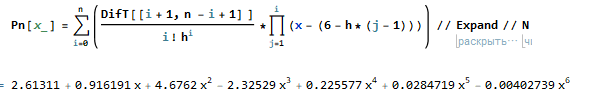
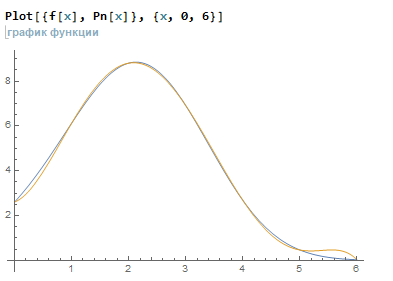
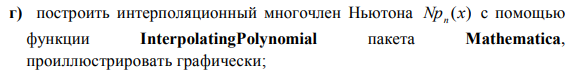


График функции (синий цвет) и график получившегося многочлена (оранжевый цвет):





Встроенная функция **InterpolatingPolynomial** в качестве одного из параметров принимает таблицу вида координата узла интерполирования – значение функции в этой точке, поэтому сначала необходимо задать эту таблицу, а затем вызвать функцию:

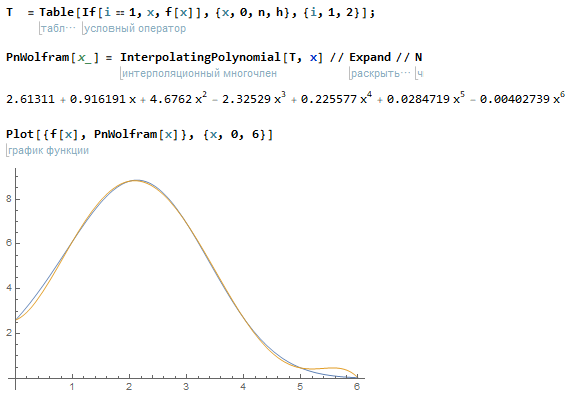
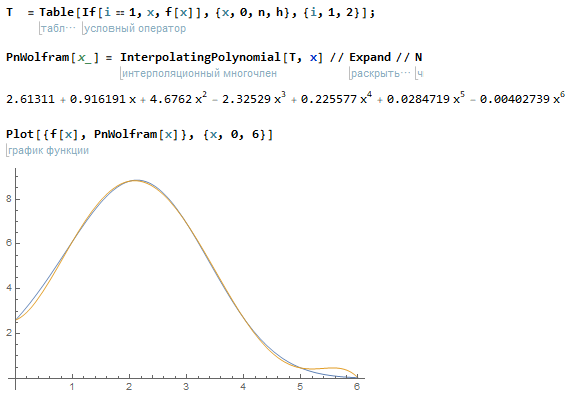
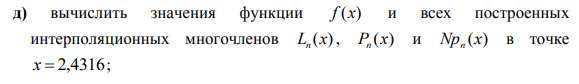
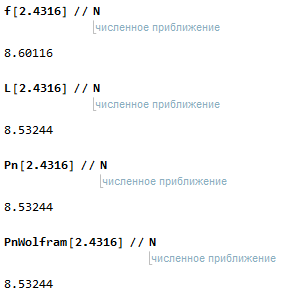


График получившегося многочлена (оранжевый цвет) и график функции (синий цвет):

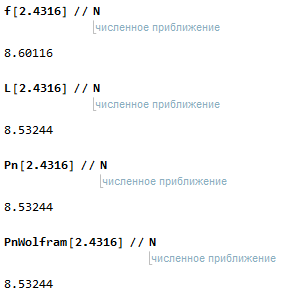




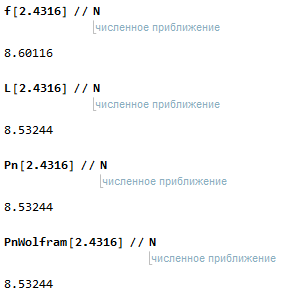
Значение функции f(x) в точке:



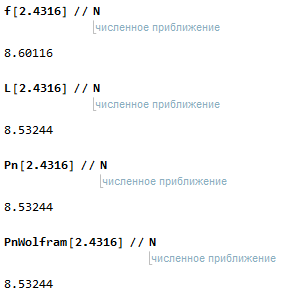
Значение многочлена Лагранжа L(x) в точке:

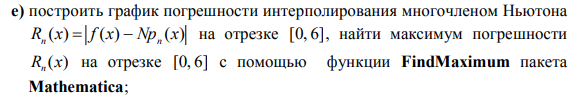


Значение второго интерполяционного многочлена Ньютона в точке:



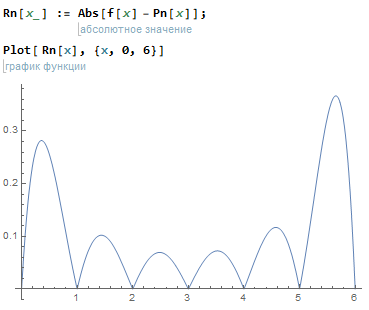
Значение многочлена, построенного встроенной функцией в точке:



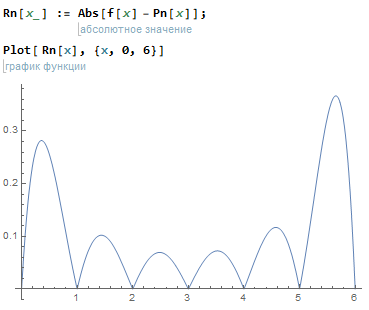


Абсолютная погрешность может быть вычислена как:

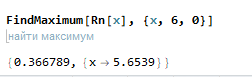




Построим график погрешности интерполирования:

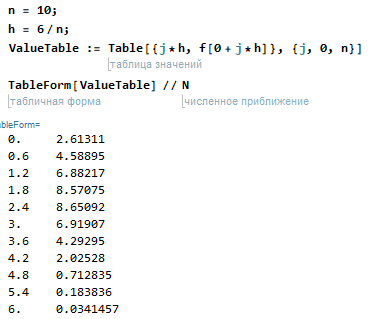


Найдем максимальную погрешность с помощью функции **FindMaximum**:

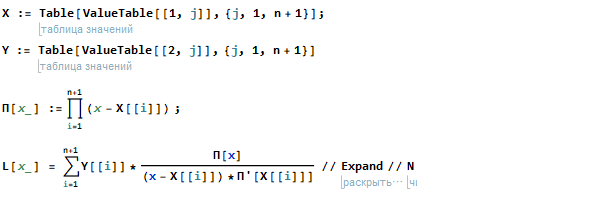


Аналогичные действия проделаем для n = 10:

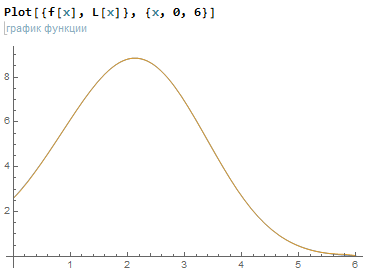
Построим таблицу значений:



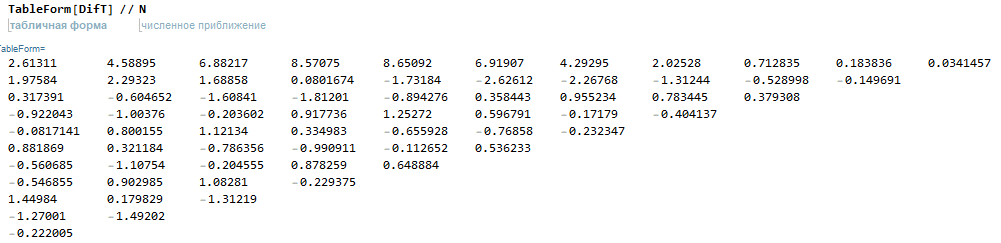
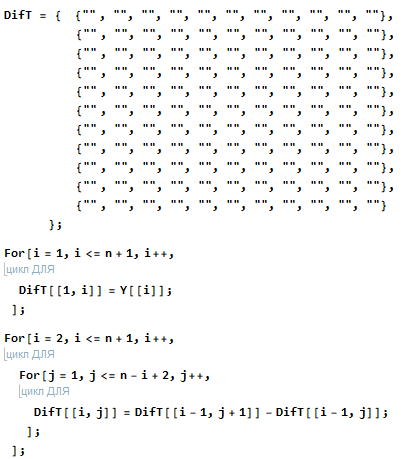
Построим многочлен Лагранжа:



Построим график многочлена (оранжевый цвет) и график функции (синий цвет):

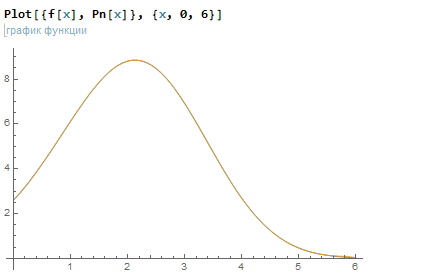


Заполним таблицу конечных разностей:

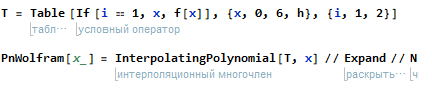


Построим интерполяционный многочлен Ньютона и его график:



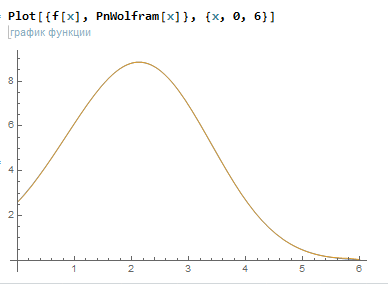


Подготовим таблицу значений в интерполяционных узлах и построим многочлен функцией **InterpolatingPolinomial**:





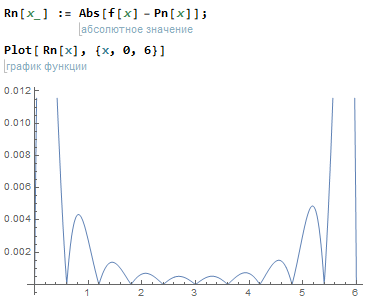
Построим график интерполяционного многочлена (оранжевый) и функции (синий):



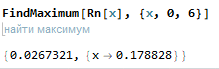
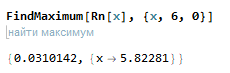
Значение функции f(x), многочлена Лагранжа L(x), второго интерполяционного многочлена Ньютона Pn(X), многочлена, построенного встроенной функцией в точке:



Выразим погрешность и построим график погрешности:



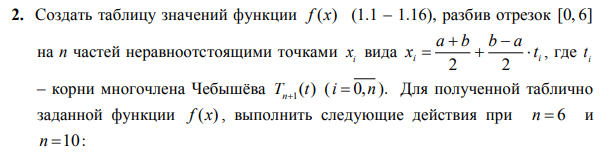
Максимальную погрешность найдём функцией **FindMaximum**, причем проверим 2 промежутка, так как график на них виден не полностью:



Максимальная погрешность – 0.0310142, когда Х стремится к 5.82281.



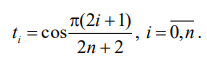
На основании двух построений выше можно заметить, что при увеличении количества узлов от 7 до 11 максимальная погрешность интерполирования уменьшилась от 0.367 до 0.031 (почти в 12 раз). То есть, чем больше узлов интерполирования – тем более приближённым к функции оказывается интерполяционный многочлен.



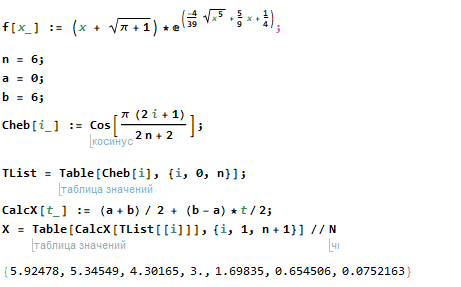
В этом задании будем строить многочлен по чебышёвским узлам интерполирования. Каждый из узлов выражается формулой:



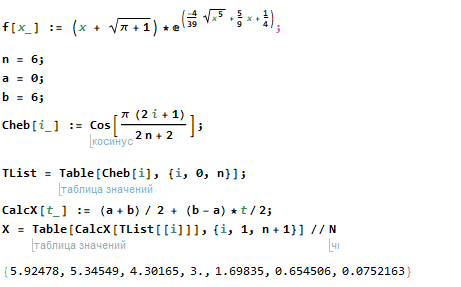
где



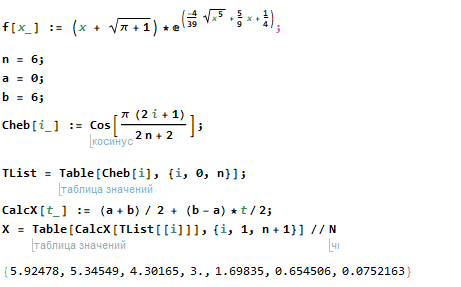
Зададим функцию f(x) и параметры a, b и n = 6:



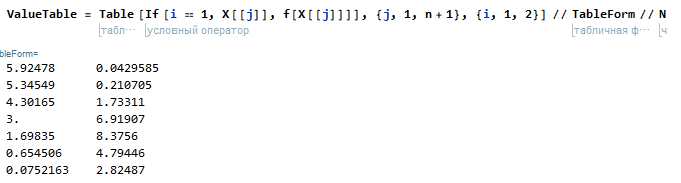
Зададим функцию Cheb для получения ti, а затем с её помощью построим таблицу корней многочлена Чебышёва для i от 0 до n:



Зададим функцию CalcX, для получения xi, и построим с ее помощью вектор X с координатами x узлов интерполирования:



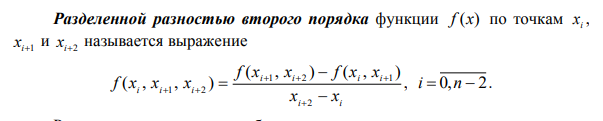
Построим всю таблицу значений:

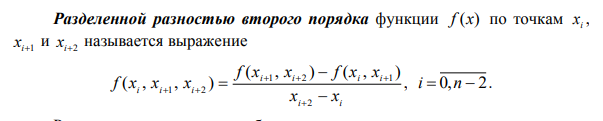




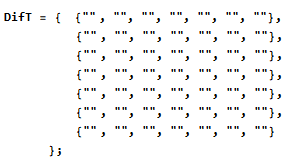




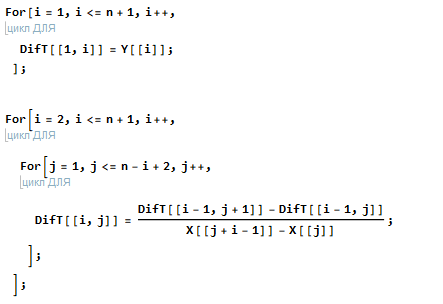


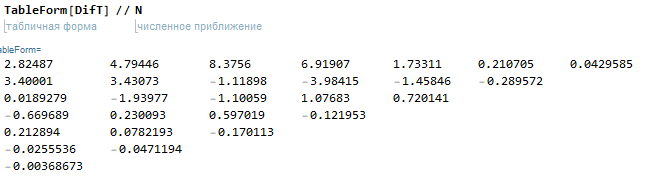


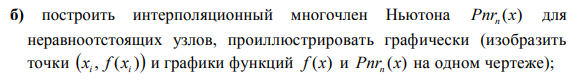
Аналогично заданию 1 заполним таблицу разделённых разностей:

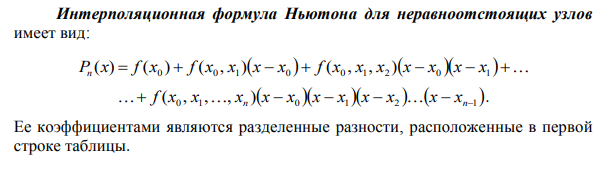


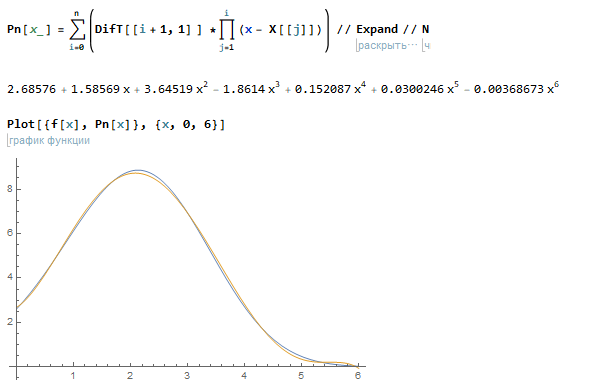




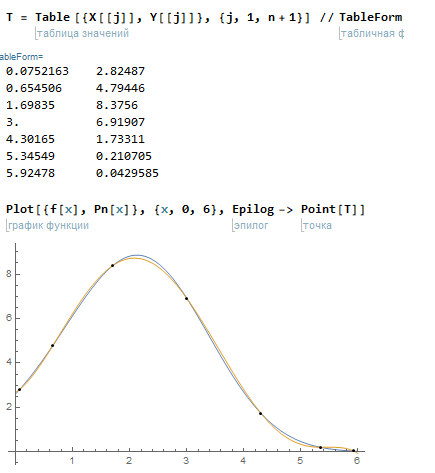






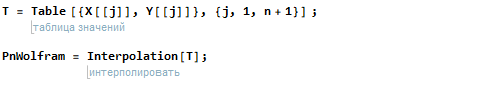


Подготовим таблицу значений в каждом из узлов интерполирования и построим график функции (синим цветом), график построенного многочлена (оранжевым цветом) и отметим узлы интерполирования:

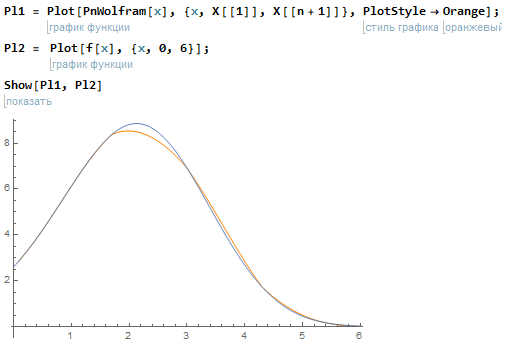




Подготовим таблицу значений для чебышёвских узлов и зададим функцию с помощью встроенной функции **Interpolation:**

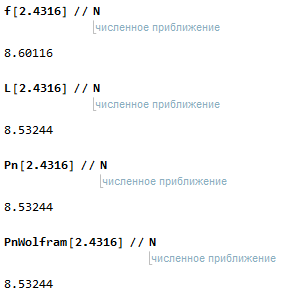


Построим графики функции (синим цветом) и график интерполяционного многочлена (оранжевым цветом).

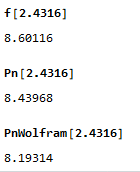




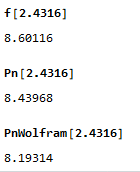
Значение функции f(x) в точке:

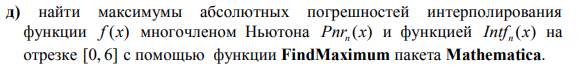


Значение второго интерполяционного многочлена Ньютона в точке:

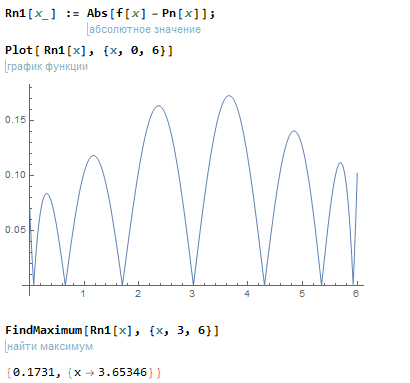


Значение многочлена, построенного встроенной функцией в точке:

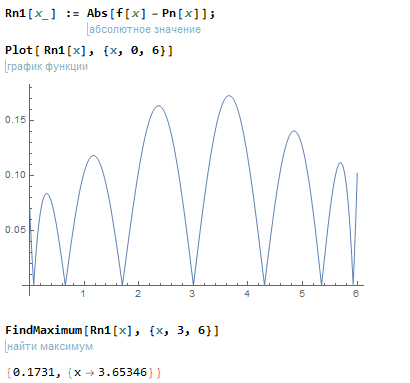




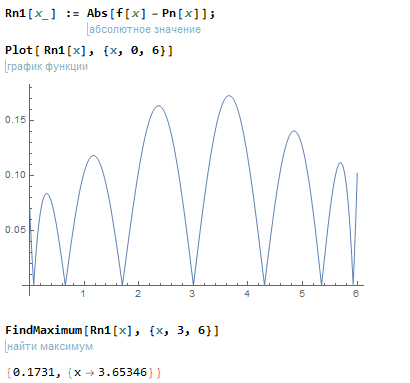
Погрешность описывается формулой:



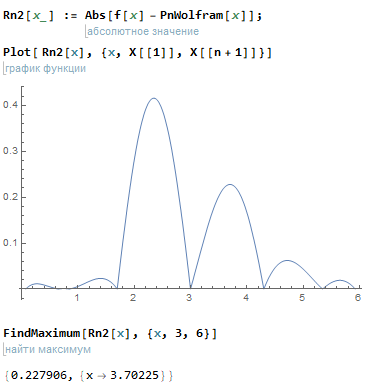
Построим график погрешности интерполирования:

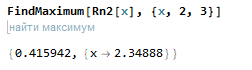


Найдём максимальную погрешность (по графику видно, что максимум находится на промежутке (3;6)):

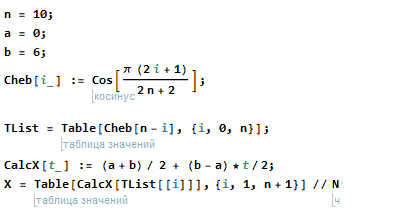


Аналогично для многочлена, построенного встроенной функцией:

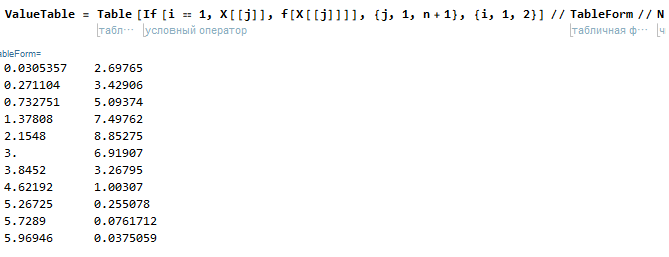




Проделаем те же действия для n = 10:



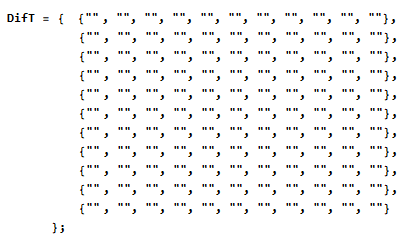
Построим таблицу значений

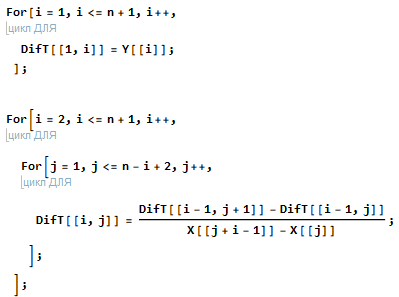


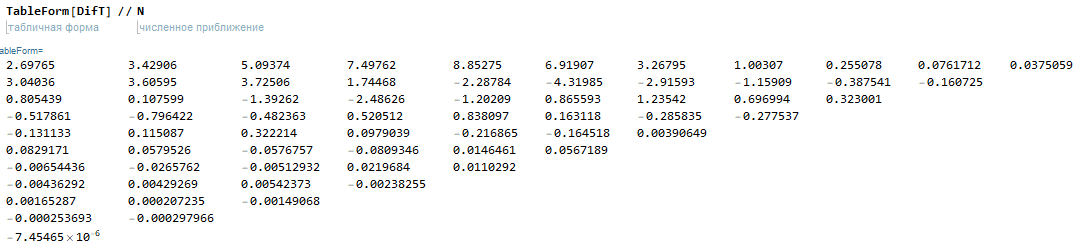
Для удобства зададим вектор Y:



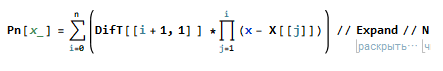
Построим таблицу разделенных разностей:



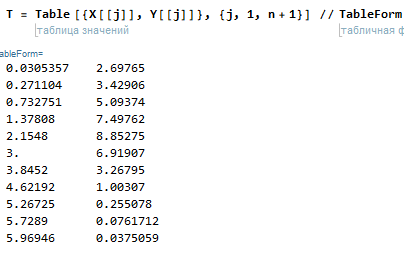




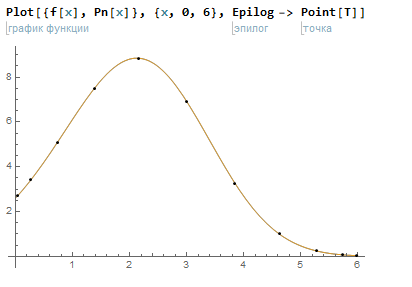
Так же как в задании 1 построим интерполяционный многочлен Ньютона:



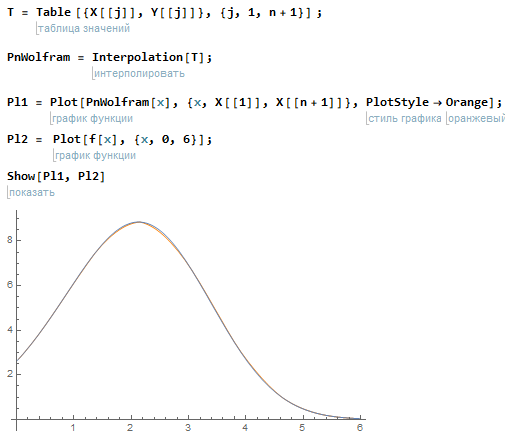
Подготовим таблицу значений функции в узлах интерполирования:



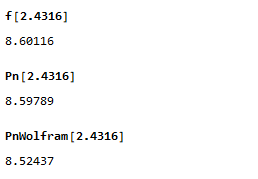
Построим график функции (синим цветом), график интерполяционного многочлена (оранжевым цветом) и отметим узлы интерполирования:



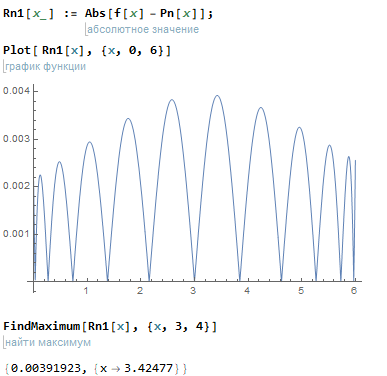
Зададим интерполяционный многочлен через встроенные функции и построим график:

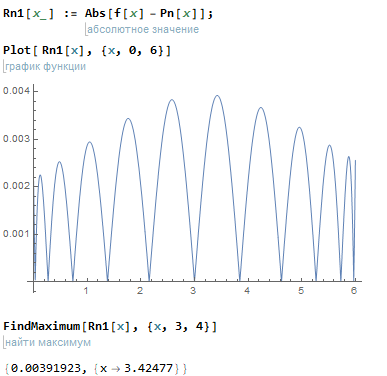


Найдем значения функции f(x), интерполяционного многочлена Ньютона Pn(x) и многочлена, построенного функцией **Interpolation**, в точке 2.4316

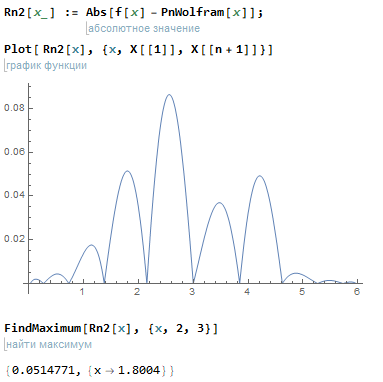


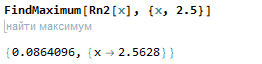
Найдем максимальную погрешность для интерполяционного многочлена:

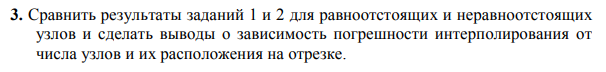




Найдем погрешность интерполяционного многочлена, построенного встроенной функцией:

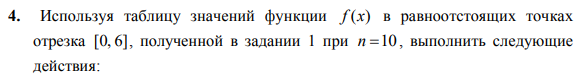






В задании 1 исследовалась погрешность интерполяционного многочлена при разном количестве равноотстоящих узлов интерполирования. Сравнив результаты, можно заметить, что при увеличении количества узлов от 7 до 11 максимальная погрешность интерполирования уменьшилась от 0.367 до 0.031 (почти в 12 раз). То есть, чем больше узлов интерполирования – тем более приближённым к функции оказывается интерполяционный многочлен.

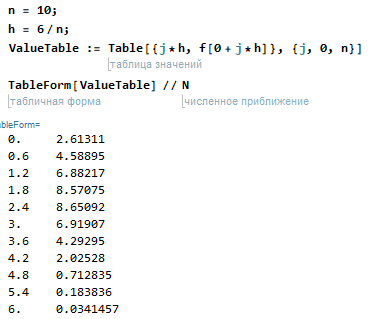
В задании 2 погрешность интерполяционного многочлена исследовалась при разном количестве неравноотстоящих узлов. Снова можно заметить, что при увеличении количества узлов интерполирования абсолютная погрешность уменьшается, а интерполяционный многочлен сильнее приближается к исходной функции. При выборе в качестве узлов интерполирования узлы Чебышёва – погрешность получается меньшей, чем при том же количестве равноотстоящих узлов (при n = 10 максимальная погрешность для равноотстоящих узлов равна 0.031, а для узлов Чебышёва – 0,00391).

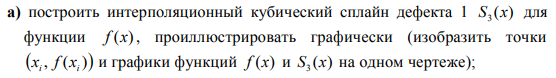


Зададим функцию:

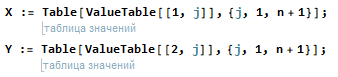


Построим таблицу значений для n = 10:





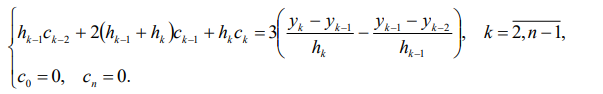
Для удобства построим векторы X и Y:



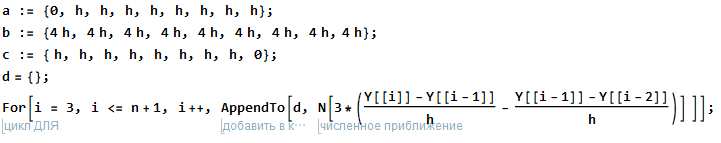
Кубический сплайн дефекта 1 на каждом частичном отрезке выражается:



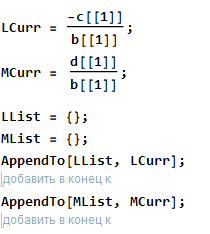
Необходимо найти коэффициенты интерполяционного многочлена. Коэффициенты Ck можно найти, решив систему:

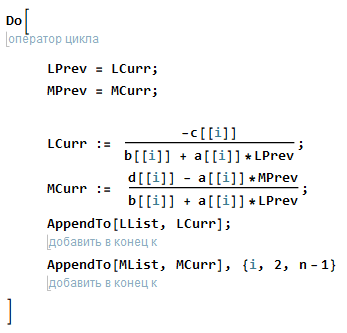


Зададим списки коэффициентов для решения системы уравнений методом прогонки с целью поиска всех коэффициентов ck:

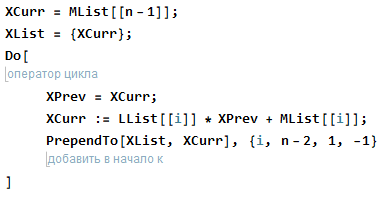


Вычислим и сформируем списки прогоночных коэффициентов:

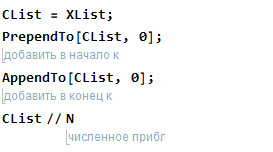




Выполним обратную прогонку:



Полученный список XList – коэффициенты Ck для интерполирования кубическим сплайном. Сформируем список CList для нахождения остальных коэффициентов, прибавив к XList C0 = 0 и Cn = 0:

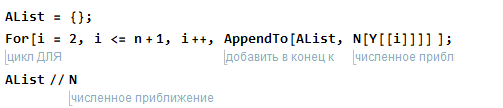




Коэффициенты Аk вычисляются по формуле:



Сформируем список AList этих коэффициентов:

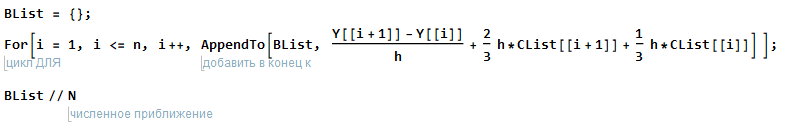




Коэффициенты Bk вычисляются по формуле:



Сформируем список BList этих коэффициентов:

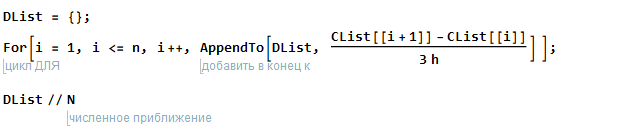




Коэффициенты Dk вычисляются по формуле:

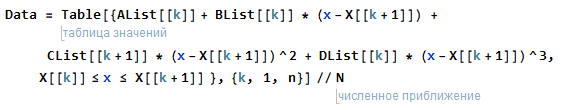


Сформируем список DList этих коэффициентов:

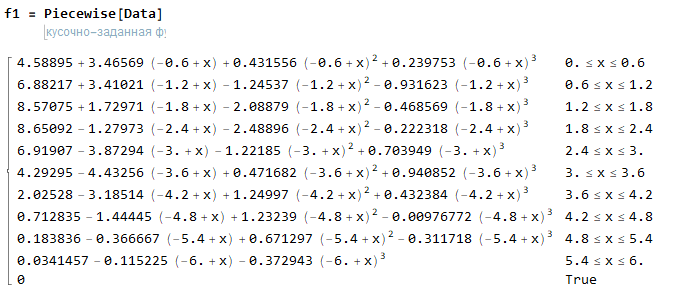




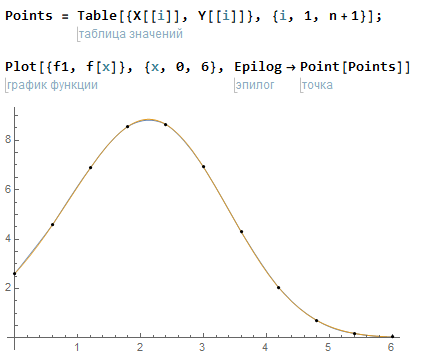
Сформируем пары функция-промежуток для построения кусочно-заданной функции:



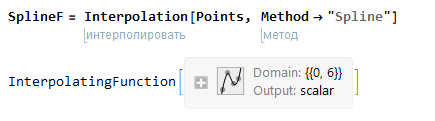
Зададим функцию:

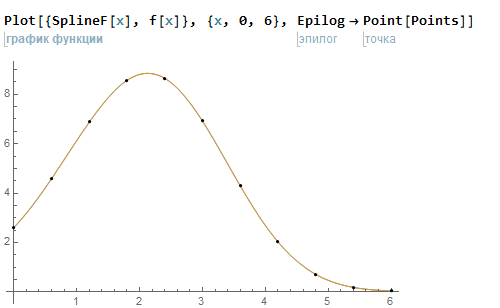


Построим на одном графике график функции, кубического сплайна и отметим узлы интерполирования:

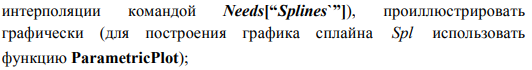


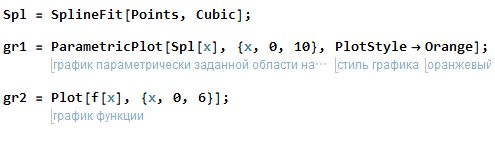


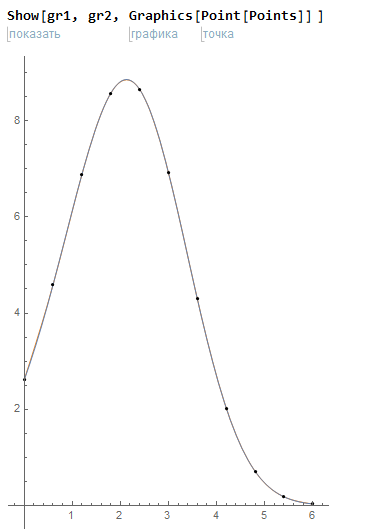










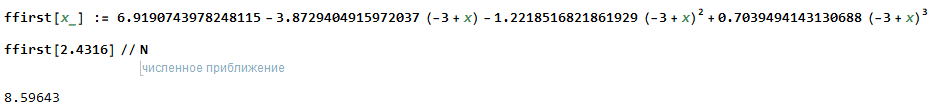




Значение функции:



Значение кубического сплайна (задание 4а):

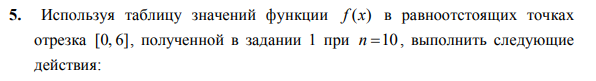


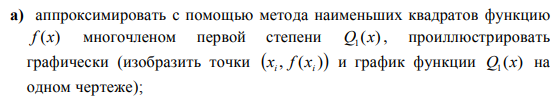
Значение функции, полученной с помощью **Interpolation[data, Method - Spline]**:



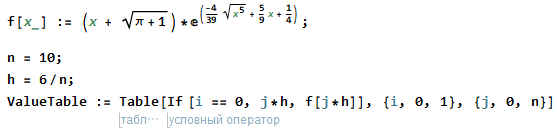
Значение, полученное с помощью **SplineFit**:

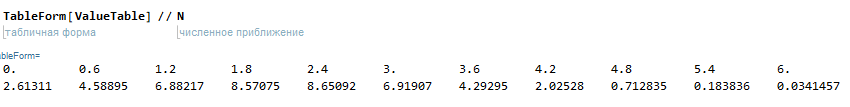




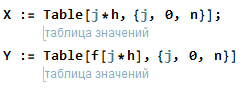


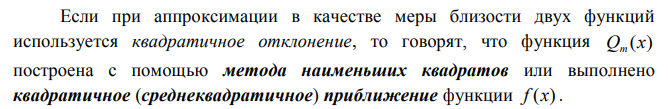
Зададим функцию и таблицу значений:



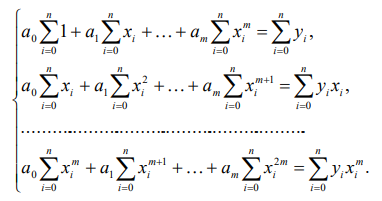


Для удобства:



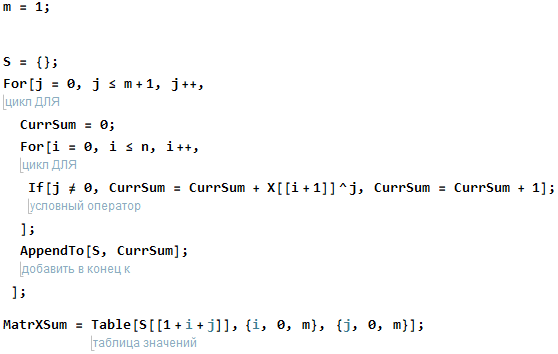


Можно доказать, что для получения наименьшего квадратичного отклонения от функции f(x), нужно, чтобы коэффициенты многочлена удовлетворяли системе уравнений:

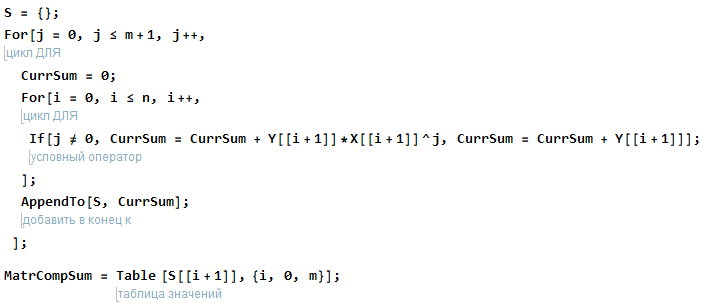


Систему можно представить в виде произведения квадратной матрицы сумм xi на вектор A коэффициентов многочлена, в результате чего получится вектор сумм произведений xim\*yi. Решив систему относительно вектора A, можно найти все коэффициенты.

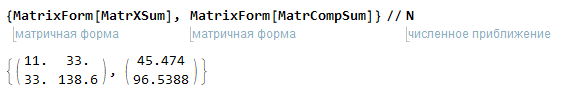
Зададим m = 1, заполним список сумм Xim для m от 0 до 2m, а затем сформируем из этого списка матрицу X сумм:



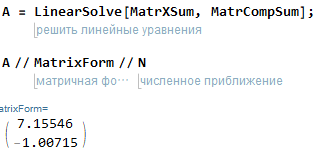
Заполним список сумм YiXim для m от 0 до 2m, а затем сформируем из этого списка матрицу X сумм:



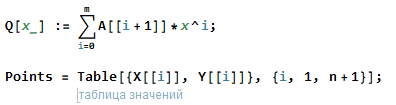
Полученные матричные параметры системы:



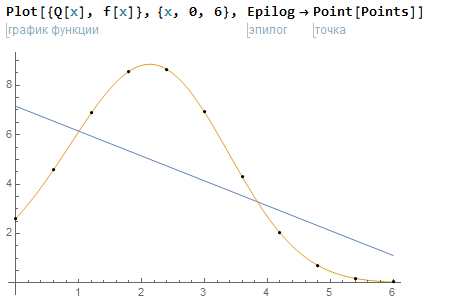
Для нахождения коэффициентов a0, a1, … am:

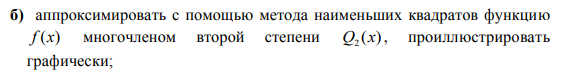


Построим многочлен и таблицу значений функции в узлах интерполяции:

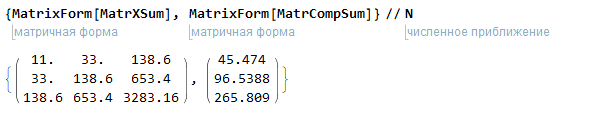


Отразим на графике:

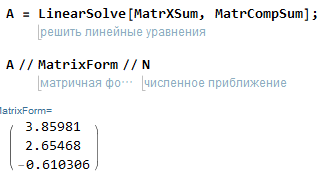




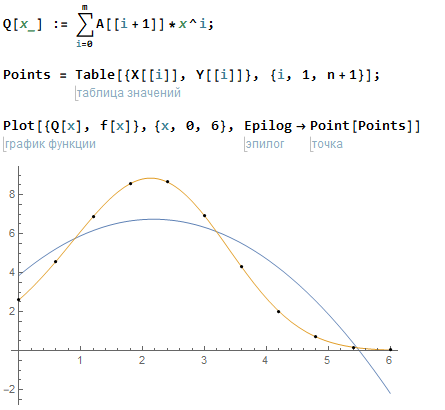
Аналогичными действиями построим матрицу сумм Х и матрицу сумм произведений для m=2:

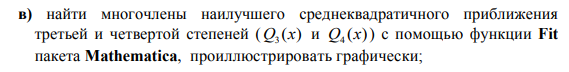


Найдем коэффициенты многочлена:

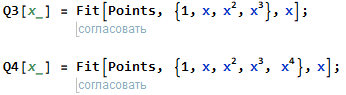


Построим многочлен и график:

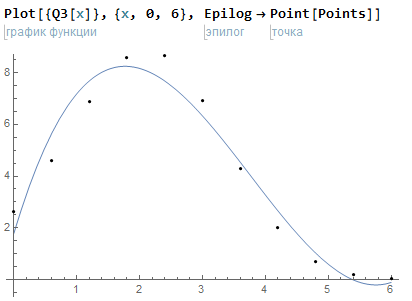


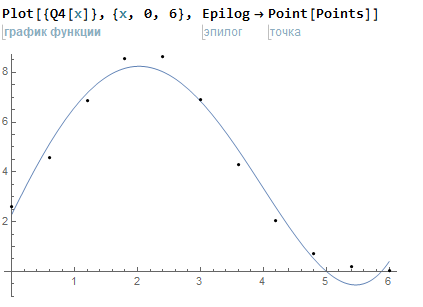


Зададим функции:

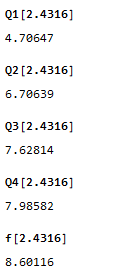


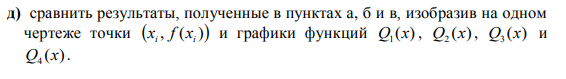
Построим графики:

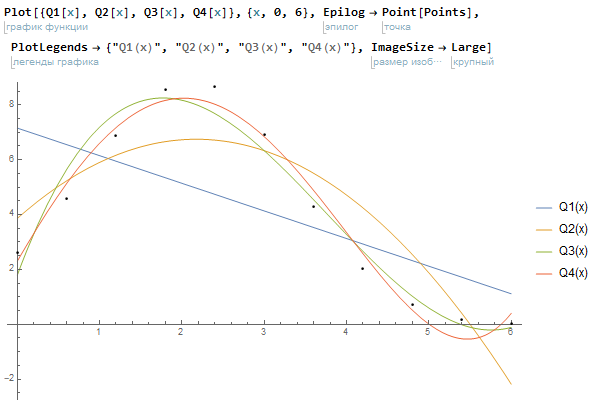












По графикам видно, что с повышением степени интерполяционного многочлена, результат все больше приближается к исходной функции.